УДК 519.72

Н. В. Мясникова, М. П. Берестень, М. П. Строганов

АППРОКСИМАЦИЯ МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Аннотация. Рассмотрены вопросы аппроксимации сигналов и функций сложной формы по экстремумам на основе разложения на знакопеременные составляющие. Показано, что на основе аппроксимации «колокольными импульсами» могут быть определены спектральные, времячастотные и другие характеристики сигналов, что является основой ее применения в технических системах.

Ключевые слова: спектр, аппроксимация, разложение сигналов.

Abstract. The article consideres signal and complex function approximation by extremum, based on decomposition to alternating components. The researchers demonstrate that spectral, time-and-frequency and other features of signals can be determined on the basis of bell-shaped impulse approximations, which is crucial in terms of approximation application in technical systems.

Key words: spectrum, approximation, signal decomposition.

Введение

В цифровой обработке сигналов и изображений аппроксимация является инструментом для получения спектральных характеристик, поэтому будем рассматривать аппроксимацию функциями, спектр которых известен и имеет ту же форму, задаваемую тем же набором параметров. Например, для спектрального анализа удобна аппроксимация реализации гауссовыми кривыми. В данной статье рассмотрены вопросы аппроксимации сигналов и функций сложной формы по экстремумам на основе разложения на знакопеременные составляющие.

1. Разложение сигналов на составляющие с известным спектром

Рассмотрим сущность предлагаемого подхода к аппроксимации. Линейность преобразования Фурье позволяет применить общий прием приближенного вычисления спектра, основанный на следующих соображениях.

Пусть данная функция $f(t)$ аппроксимирована конечной суммой некоторых произвольно выбранных функций $f_k(t)$, т.е.

$$f(t) \approx \sum_{k=1}^{N} f_k(t).$$

Это соотношение может служить основой различных вариантов формул и таблиц для вычисления спектров.

Метод аппроксимации основан на разложении исследуемого сигнала на составляющие, спектр которых известен: спектр исходного сигнала получают в виде суммы спектров всех составляющих. Математически способ основан на аппроксимации сигнала во временной области с любой заданной точностью базисными функциями типа e^{-x^2}, $\mathrm{ch}^{-1}(x)$, $1/(1+x^2)$, т.е. «колокольными» импульсами.

При таком подходе реальный сигнал заменяется функциями вида

$$f(t)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_i}\alpha_{ki}\varphi\left[\beta_{ki}\left(t-c_{ki}\right)\right],$$

а спектр –

$$S(j\omega)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{\alpha_{ki}}{\beta_{ki}}\varphi\left(\frac{\omega}{\beta_{ki}}\right)e^{-j\omega c_{ki}},$$

где $\alpha_{ki},\beta_{ki},c_{ki}$ – параметры приближающей функции; m – число экстремумов: m_1 – в исходной реализации; $m_2, m_3, ..., m_i$ – в разности $\varepsilon_i(t)$ между исходной реализацией и аппроксимирующей функцией; l – число итераций, необходимое для достижения заданной точности.

Процедура аппроксимации связана с выделением из сигнала знакопеременных составляющих, каждая из которых может быть отнесена к определенной полосе частот. Значения экстремумов и интервалы между ними определяют параметры колокольных составляющих для сигнала вида $e^{-x^2/2\beta^2}$. Методика определения параметров «колокольных» составляющих для сигнала сложной формы иллюстрируется рис. 1.

Параметр β_i определяется на основе известной связи между формой и параметрами:

$$\beta_i=\min((c_i-c_{i-1}),(c_{i+1}-c_i))/2,2 \text{ или } \beta_i=(c_{i+1}-c_{i-1})/4,4.$$

Любой сигнал можно привести к виду, указанному на рис. 1, путем центрирования относительно скользящего среднего. Эффективен и такой подход: по экстремумам числового ряда производится его сглаживание оператором вида $\hat{y}_{эi}=0,25y_{эi-1}+0,5y_{эi}+0,25y_{эi+1}$, что соответствует пропусканию данных через цифровой фильтр нижних частот с передаточной функцией

$$G(f)=\frac{\hat{Y}(f)}{Y(f)}=0,25\left(e^{j2\pi f(t_{эi-1}-t_{эi})}+2+e^{j2\pi(t_{эi=1}-t_{эi})}\right).$$

Положим для простоты, что экстремумы равноудалены друг от друга, тогда передаточная функция примет вид

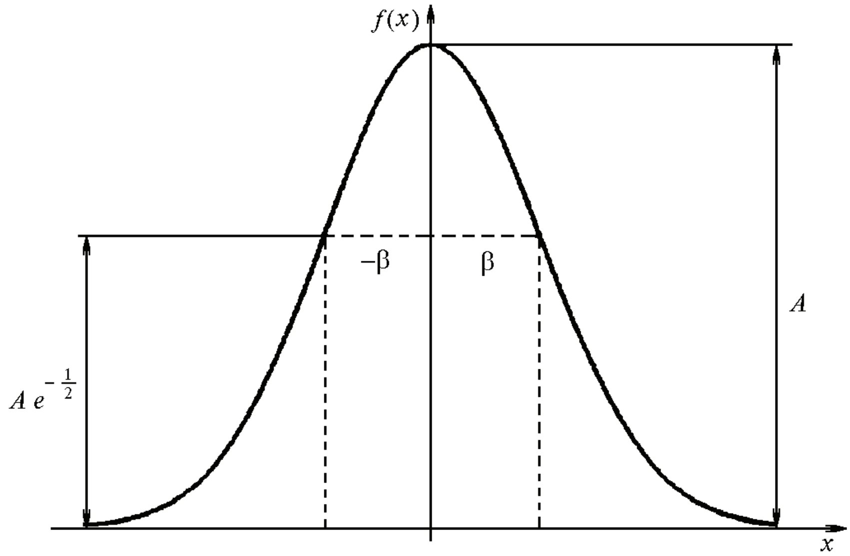
$$G(f)=0,25\left(e^{-j2\pi f\Delta t}+2+e^{j2\pi f\Delta t}\right)=0,5\left(1+\cos(2\pi f\Delta t)\right).$$

Этот фильтр «убирает» самую высокочастотную составляющую. Следовательно, сама эта составляющая может быть выделена следующим образом: $\overline{y}_{эi}=y_{эi}-\hat{y}_{эi}=-0,25y_{эi-1}+0,5y_{эi}-0,25y_{эi+1}$. Последнее выражение реализует цифровой фильтр высоких частот с передаточной функцией

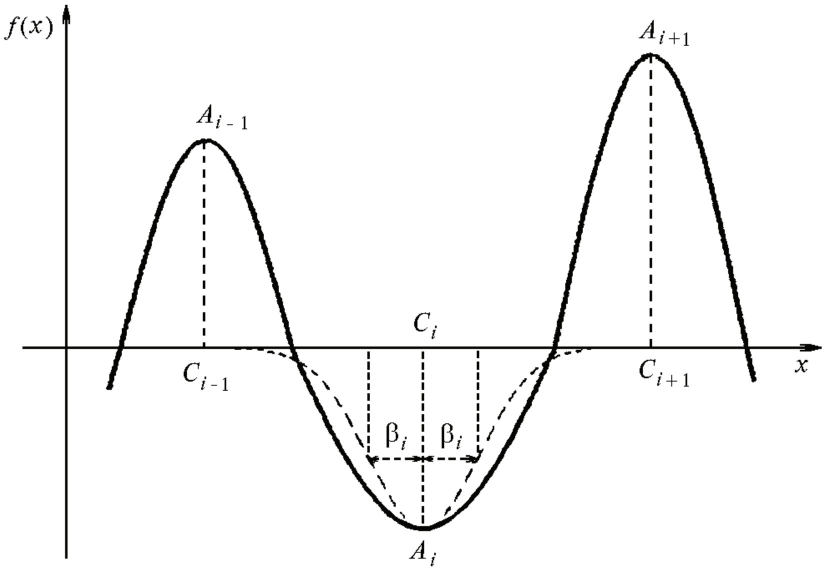
$$G(f)=\frac{\overline{Y}(f)}{Y(f)}=0,25\left(-e^{j2\pi f(t_{эi-1}-t_{эi})}+2-e^{j2\pi(t_{эi=1}-t_{эi})}\right).$$

При тех же допущениях, что мы сделали для первого фильтра, получим выражение для передаточной функции

$$G(f) = 0,25\left(-e^{-j2\pi f\Delta t} + 2 - e^{j2\pi f\Delta t}\right) = 0,5(1-\cos(2\pi\, f\Delta t)\,.$$



а)



б)

Рис. 1. Определение параметров колокольной составляющей

Наиболее исследован вопрос сходимости процедуры аппроксимации гауссовыми функциями вида $e^{-\beta^2 x^2}$:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_i} x_{ki} e^{-\beta_{ki}^2 \left(t - c_{ki}\right)^2}\,.$$

В этом случае выражение для комплексного спектра примет вид

$$S(j\omega) = \sqrt{\pi}\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{x_{ki}}{\beta_{ki}}e^{-\omega^2/\left(4\beta_{ki}^2\right)-j\omega c_{ki}},$$

где x_{ki} – экстремумы: x_{k1} – исходного ряда, $x_{k2},...,$ x_{kl} – разности $\varepsilon_i(t)$ между исходной реализацией и аппроксимирующей функцией; c_{ki} – момент измерения, соответствующий экстремуму x_{ki}.

Из последнего выражения вытекает и способ определения комплексного спектра сигнала сложной формы [2]:

– из исследуемого аналогового сигнала, или сигнала, представленного дискретными отсчетами, выделяются и запоминаются амплитудные значения экстремумов и интервалы между ними;

– по значениям экстремумов и интервалам между ними формируются «колокольные» импульсы;

– спектр «колокольного» импульса определяется путем «временного» и амплитудного масштабирования его параметров;

– определяется комплексный спектр «колокольного» импульса как результат фазового сдвига;

– определяется спектр сигнала сложной формы как сумма спектров выделенных составляющих;

– указанные действия повторяются над сигналом, представляющим разность между измеряемым сигналом и уже выделенными составляющими, если эта разность превышает по абсолютной величине заранее заданную величину, определяющую точность аппроксимации на интервале измерений.

Предложенный метод аппроксимации может найти применение при определении различных параметров и характеристик сигналов. При этом возможно хранение лишь экстремальных значений сигнала, а по ним – его восстановление.

Проиллюстрируем некоторые результаты и покажем области применения:

– на рис. 2 показана аппроксимация полигармонического сигнала (использована одна итерация);

– на рис. 3 приведен аппроксимативный спектр на фоне спектра Фурье (использована одна итерация);

– на рис. 4 показано разложение сигнала на знакопеременные составляющие по его экстремумам, отмеченным на графиках точками (аналог разложения по эмпирическим модам);

– на рис. 5,а показана вейвлет-характеристика Morlet, а на рис. 5,б – аппроксимативная вейвлет-характеристика (вычисленная лишь для сдвигов, совпадающих с моментами экстремумов);

– на рис. 6,а представлено исходное изображение, а на рис. 6,б – восстановленное изображение с аппроксимацией по ряду экстремумов.

Заключение

Развитие матричных алгоритмов, их широкое применение в пакетах прикладных программ снизило интерес к аппроксимативному подходу.

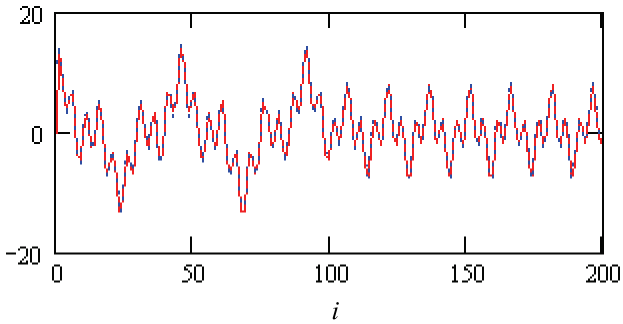


Рис. 2. Сигнал и его аппроксимация

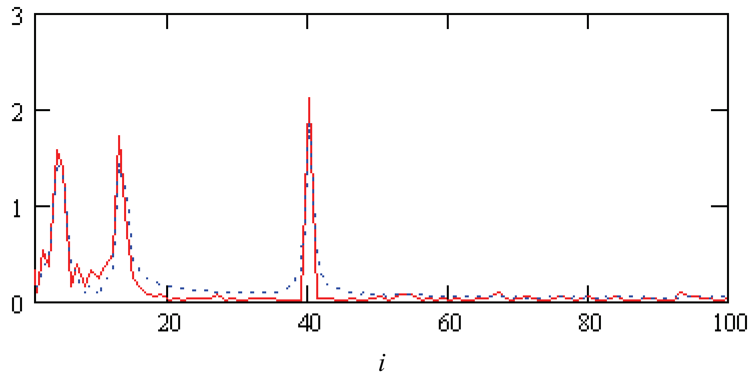


Рис. 3. Амплитудный аппроксимативный спектр на фоне спектра Фурье

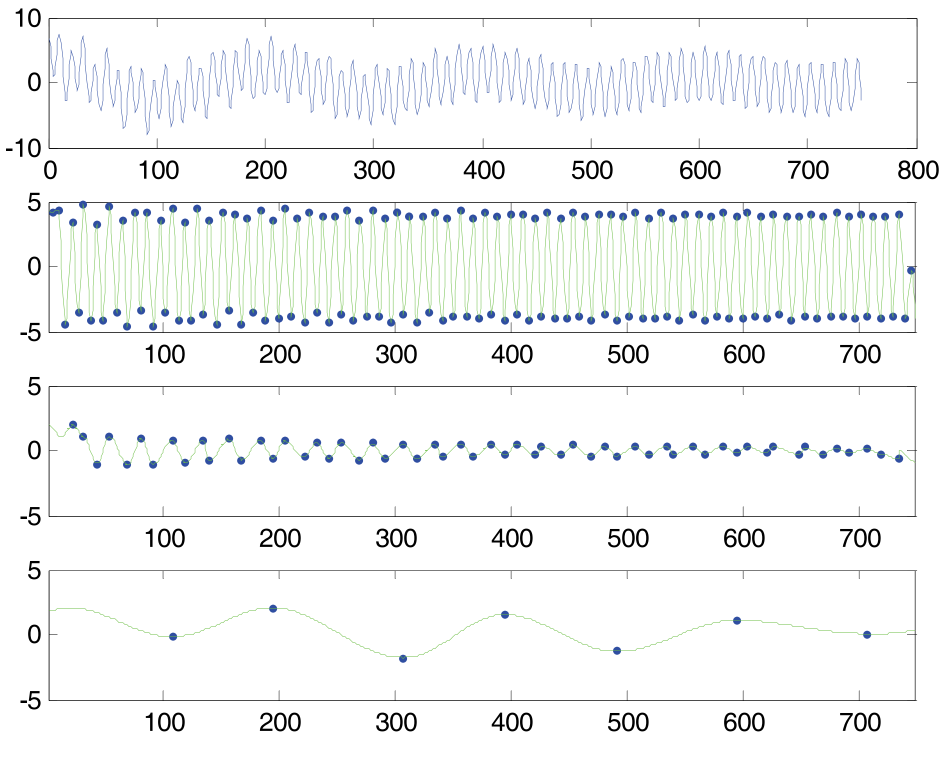
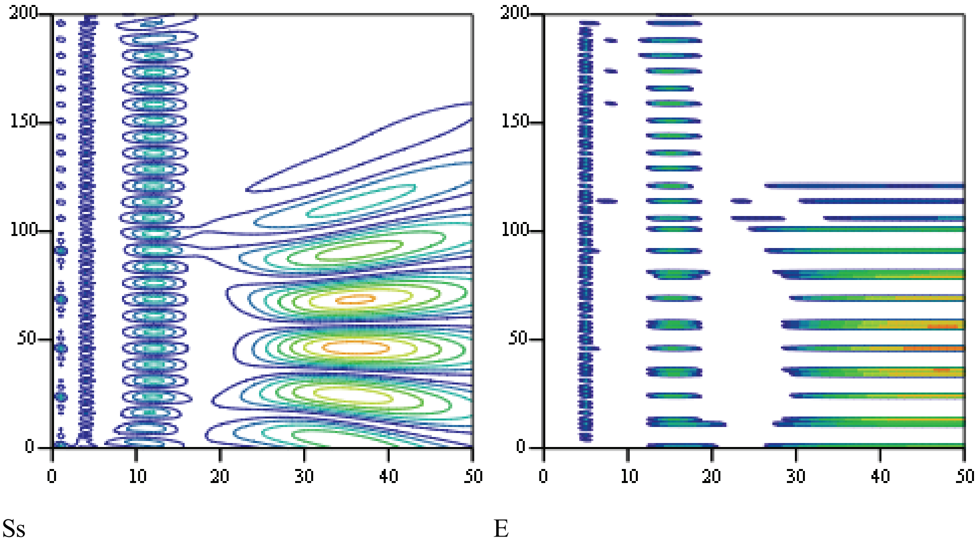
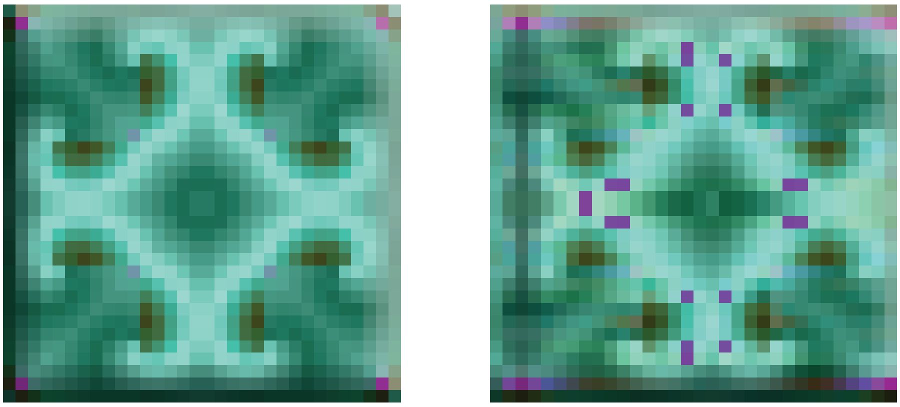


Рис. 4. Разложение сигнала на знакопеременные составляющие



а) б)

Рис. 4. Вейвлет-характеристика (а) и аппроксимативная вейвлет-характеристика (б)



а) б)

Рис. 6. Исходное изображение (а) и восстановленное
изображение с аппроксимацией по ряду экстремумов (б)

Но предлагаемый авторами метод показывает, что правильно выбранная аппроксимирующая функция позволяет на единой методологической основе вычислять самые разные характеристики и на их основе формировать диагностические признаки. При этом сама процедура аппроксимации крайне проста, не использует оптимизации, параметры аппроксимирующих функций однозначно определяются экстремумами, применение итерационной процедуры позволяет достигнуть любой точности.

Для дальнейшего снижения трудоемкости имеет смысл перейти к аппроксимации функциями $1/(1+x^2)$, чтобы не использовать в алгоритме вычисление трансцендентных функций.

Вопросы аппроксимации довольно широко освящались в публикациях авторов – в монографии, статьях, авторских свидетельствах и патентах, а также на интернет-ресурсе [1–6].

Список литературы

1. **Строганов, М. П.** Обработка сигналов в системах диагностики / М. П. Строганов, М. П. Берестень, Н. В. Мясникова ; под ред. Е. П. Осадчего : монография. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. техн. ун-та, 1997. – 119 с.
2. А. с. 1339456 СССР, МКИ G01R23/16. Аппроксимативный способ спектрального анализа / Е. П. Осадчий, М. П. Берестень, Н. В. Мясникова и др. // Открытия. Изобретения. – 1987. – № 35. – С. 138.
3. **Мясникова, Н. В.** Аппроксимативный способ вейвлет-анализа / Н. В. Мясникова, М. П. Берестень // Датчики и системы. – 2003. –№ 1. – С. 17–20.
4. **Мясникова, Н. В.** Подход к экспресс-wavelet-анализу на основе адаптивной фильтрации / Н. В. Мясникова, М. П. Берестень // Датчики и системы. – 2004. – № 2. – С. 16–21.
5. **Мясникова, Н. В.** Экстремальная фильтрация и ее приложения / Н. В. Мясникова, М. П. Берестень // Датчики и системы. – 2004. – № 4. – С. 8–11.
6. Экспресс-анализ сигналов // Автоматика и телемеханика [Электронный ресурс] / Пензенский государственный университет, Автоматика и телемеханика; Электрон. дан. – Пенза : ПГУ, 2008. – Режим доступа: http://www.pnzgu.ru/dep/k_ait/?q=express, свободный. [Загл. с экрана].

Мясникова Нина Владимировна
доктор технических наук, профессор, кафедра автоматики и телемеханики, Пензенский государственный университет

E-mail: Genok123@mail.ru

Myasnikova Nina Vladimirovna
Doctor of engineering sciences, professor, sub-department of automation and remote control, Penza State University

Берестень Михаил Петрович
кандидат технических наук, доцент, кафедра автоматики и телемеханики, Пензенский государственный университет

E-mail: beresten@sura.ru

Beresten Mikhail Petrovich
Candidate of engineering sciences, associate professor, sub-department of automation and remote control, Penza State University

Строганов Михаил Петрович
кандидат технических наук, профессор, кафедра автоматики и телемеханики, Пензенский государственный университет

E-mail: smp@mail.ru

Stroganov Mikhail Petrovich
Candidate of engineering sciences, professor, sub-department of automation and remote control, Penza State University

УДК 519.72

Мясникова, Н. В.

Аппроксимация многоэкстремальных функций и ее приложения в технических системах / Н. В. Мясникова, М. П. Берестень, М. П. Строганов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2011. – № 2 (18). – С. 113–119.